Rappels sur les outils d'analyse spectrale de signaux à temps continu

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Analyse dans le domaine fréquentiel

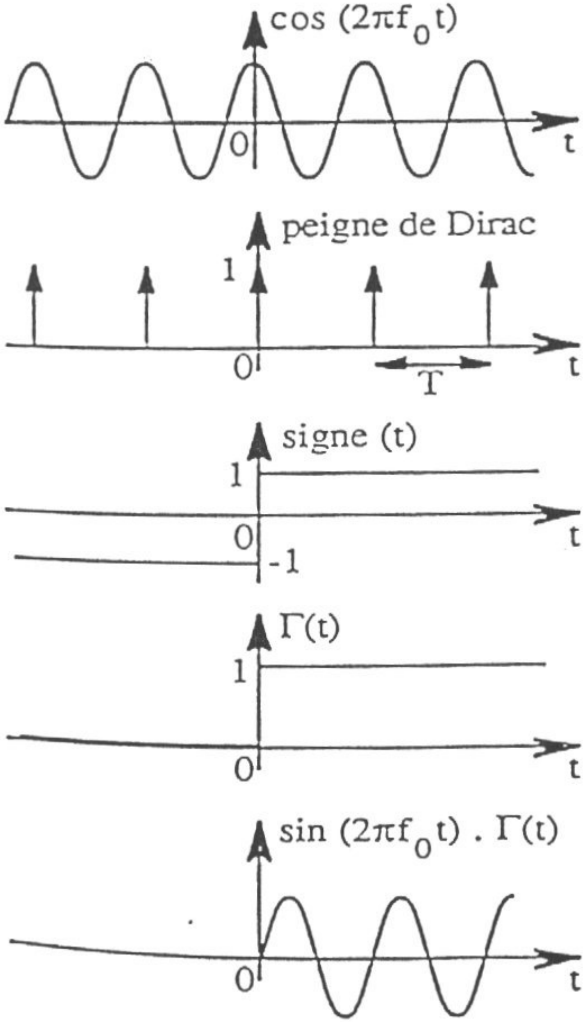
- Domaine habituel pour analyser un signal :
  - ***domaine temporel*** : analyse de l'évolution du signal au cours du temps

- Permet de mettre en évidence certaines caractéristiques lorsque la ***forme*** du signal est ***simple*** :
  - caractère périodique ou non (détermination de la période)
  - calcul de la valeur moyenne, efficace, de l'énergie,…

- Dans la pratique, les signaux ont une ***forme complexe***
  - L'analyse dans le domaine temporel devient insuffisante
  - La représentation de certaines caractéristiques du signal en fonction de la fréquence s'avère alors très utile

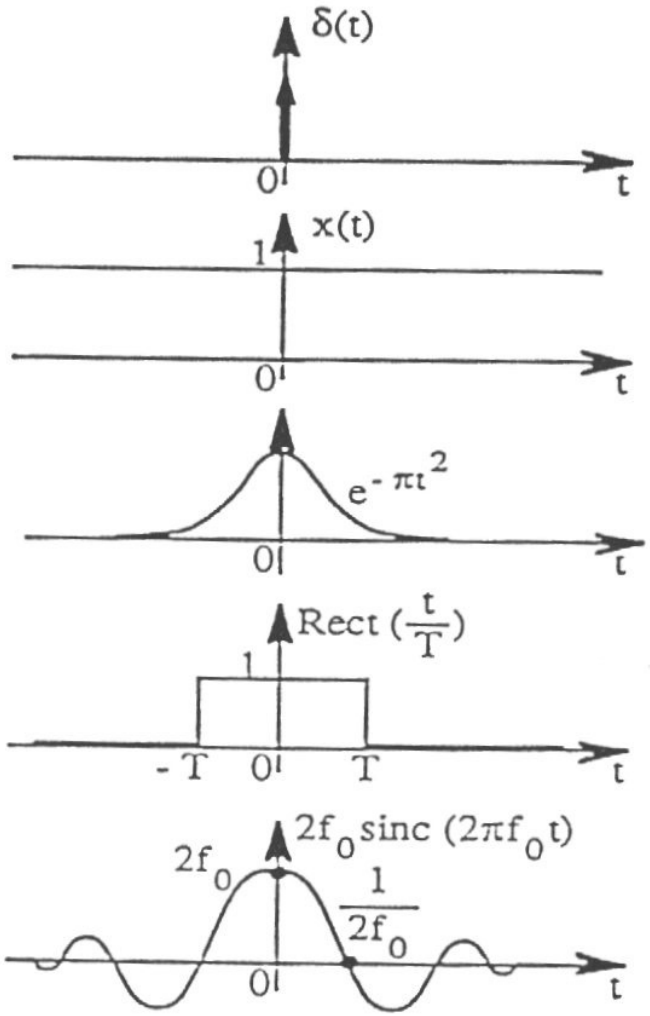
➔ ***analyse spectrale***

Signaux à temps continu usuels
Connaissez-vous leur spectre ?



Spectres ?

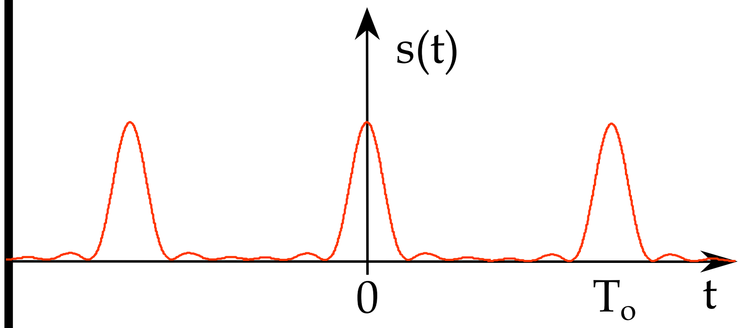
Signaux à temps continu usuels
Connaissez-vous leur spectre ?



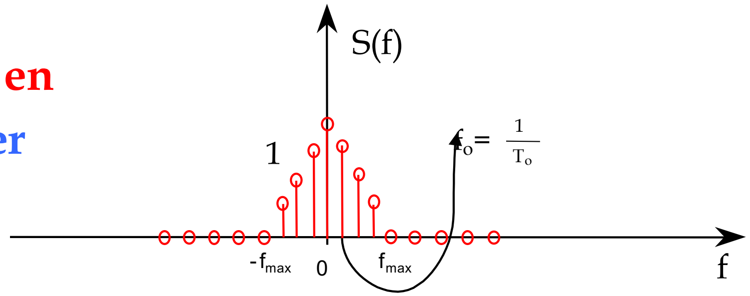
Spectres ?

Outil mathématique d'analyse spectrale de signaux à temps continu

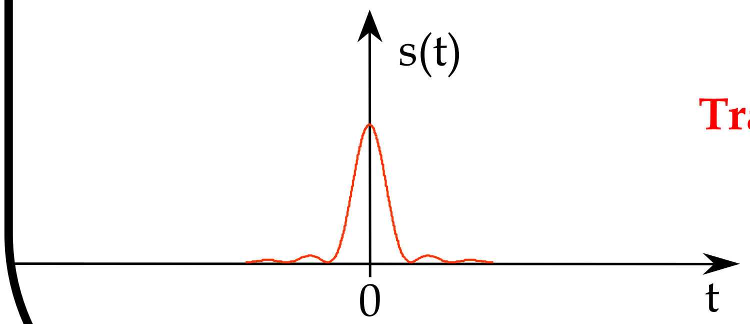
- *s(t)* est périodique



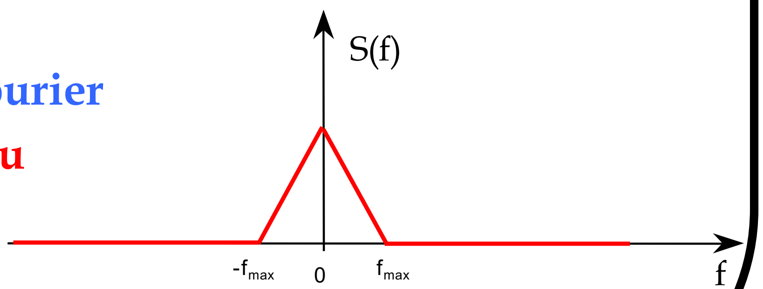
Décomposition en série de Fourier



- *s(t)* est non périodique



Transformée de Fourier à temps continu



Joseph FOURIER (1768 – 1830)

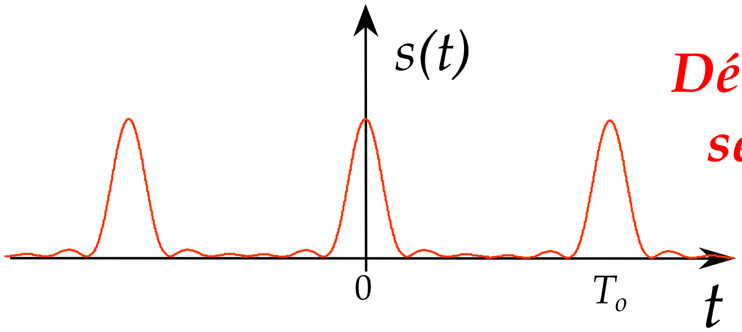
- C'est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier.
- Il a été instruit par les Bénédictins à l'école militaire. Destiné à l'état monastique, il préféra s'adonner aux sciences.
- Il a participé à la révolution française, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur. Il a été sauvé de justesse de la guillotine par la chute de Robespierre. Il intègre l'Ecole Normale Supérieure où il aura comme professeur entre autres Lagrange.
- Fourier est connu pour sa théorie analytique de la chaleur (1822). C'est à Grenoble qu'il conduit ses expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques.
- Ces travaux qui apportent une grande amélioration à la modélisation mathématique de phénomènes ont contribué aux fondements de la thermodynamique.

Fourier, à l’avant garde de la révolution numérique

https://interstices.info/dossier/joseph-fourier-250-ans/

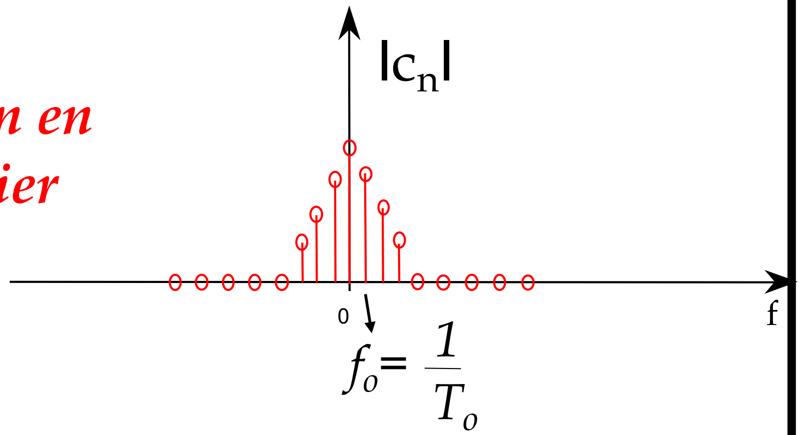
Outil pour l'analyse spectrale
de signaux périodiques à temps continu

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_o t} \qquad c_n = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o} s(t) e^{-j2\pi n f_o t} dt = |c_n| e^{jArg(c_n)}$$



Décomposition en série de Fourier

DSF



Signal à temps *continu*

Spectre *non périodique*

Signal *périodique* (T_o)

Spectre *échantillonné* f_o=1/T_o

(de raies)

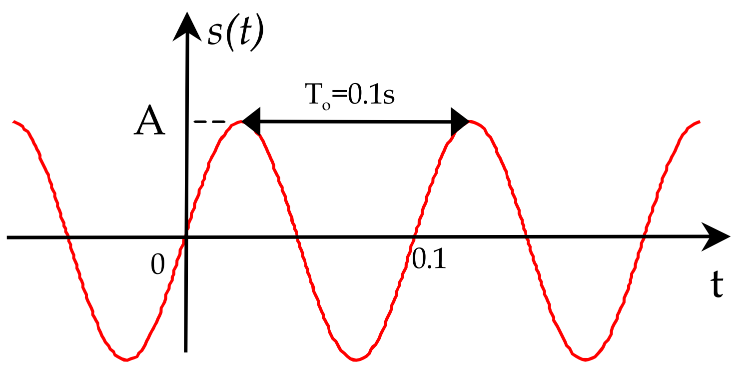
Exemple 1 : cas d'un signal sinusoïdal

- Soit un signal sinusoïdal décrit par : $s(t) = A\sin(2\pi 10 t)$

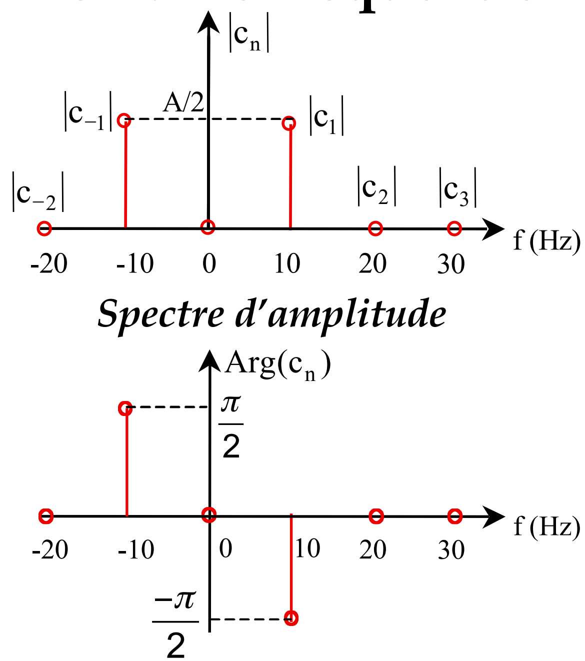
$$
\begin{aligned}
s(t) &= A\frac{e^{j2\pi 10t} - e^{-j2\pi 10t}}{2j} \\
&= \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi 10t} \\
&= c_{-1} e^{-j2\pi f_o t} + c_1 e^{j2\pi f_o t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} & |c_1| = \dfrac{A}{2} \quad arg(c_1) = -\dfrac{\pi}{2} \\
c_{-1} = \dfrac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} & |c_{-1}| = \dfrac{A}{2} \quad arg(c_{-1}) = \dfrac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre d'amplitude

Spectre de phase

Exemple 2 : cas d'un créneau

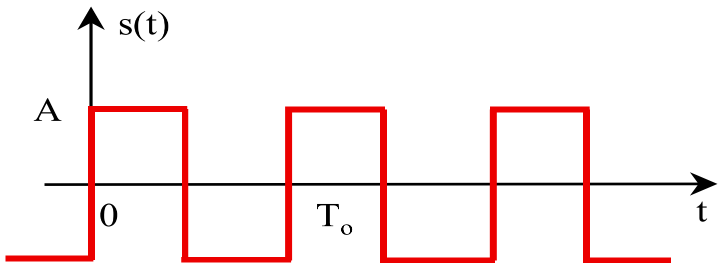
- On montre que les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$c_n = \frac{A}{jn\pi}\left(1-(-1)^n\right) \quad , n \neq 0$$
$$c_0 = 0$$

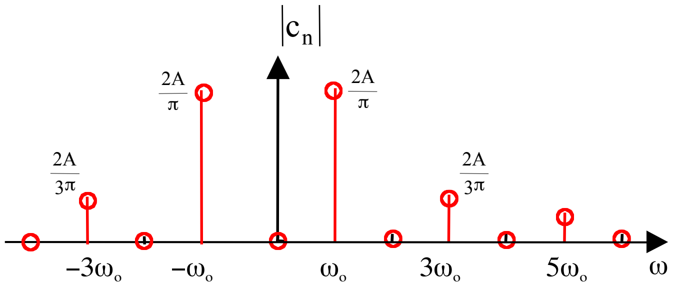
$$|c_n| = \begin{cases} \frac{2A}{|n|\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$Arg(c_{n>0}) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$
$$Arg(c_{-n}) = -Arg(c_n)$$

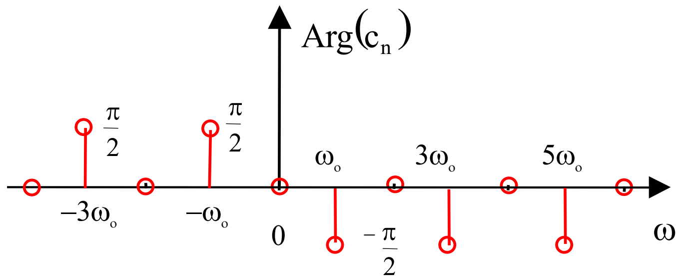
Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre d 'amplitude

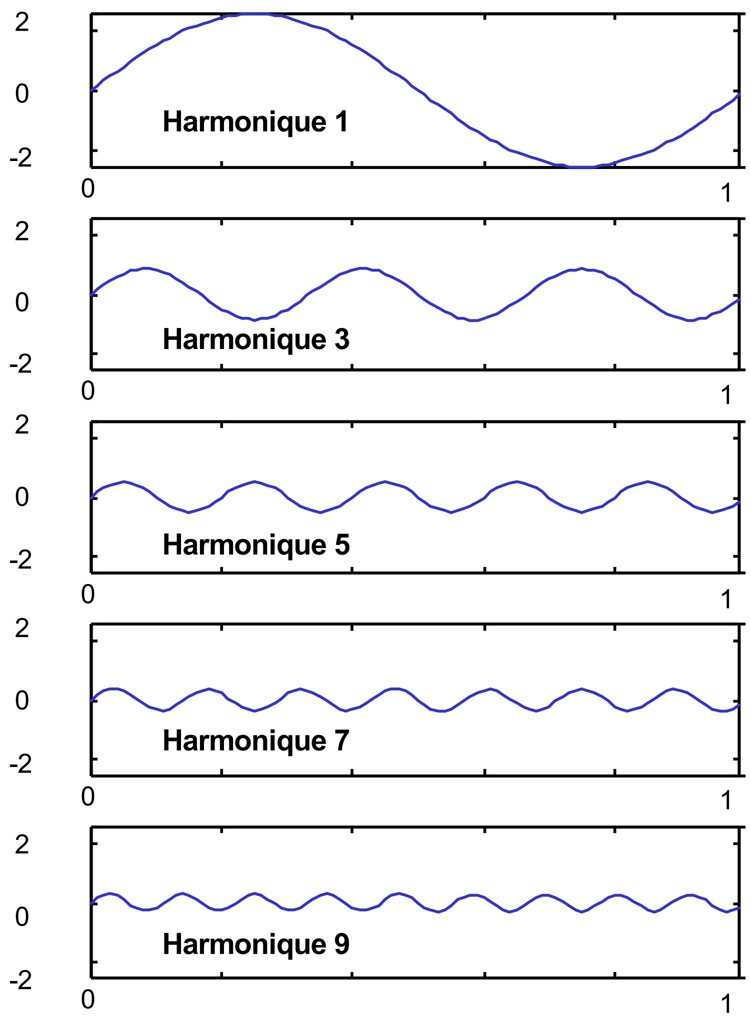


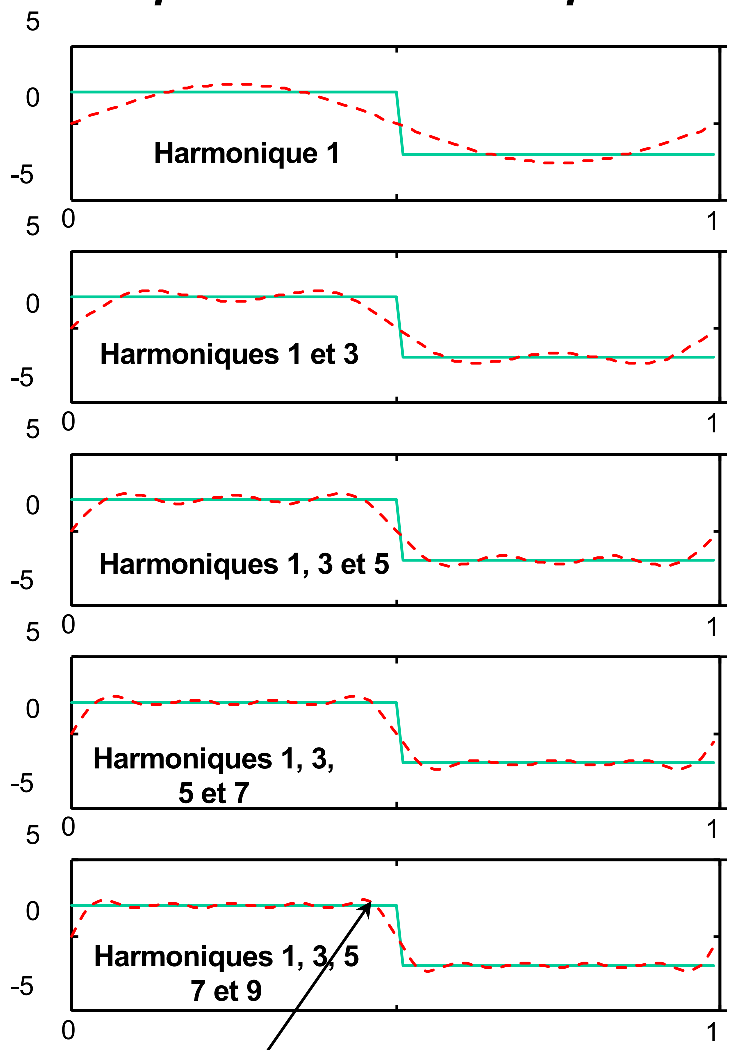
Spectre de phase

Evolution temporelle des harmoniques

$A=2\ T_o=1$

Reconstruction du signal à partir des harmoniques



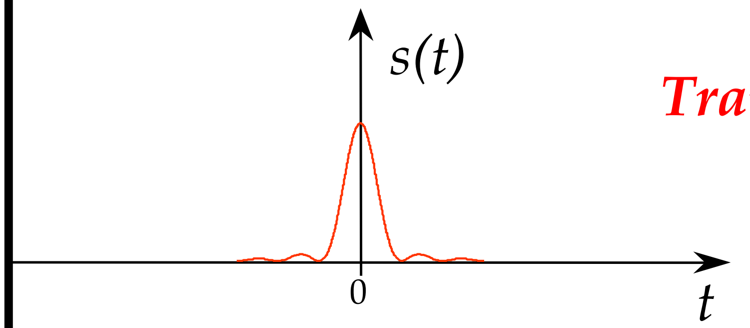


Ondulations = phénomène de Gibbs

Outil pour l'analyse spectrale

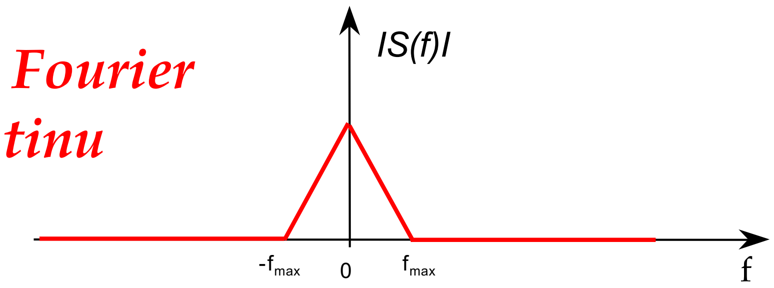
de signaux non périodiques à temps continu

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$



Transformée de Fourier
à temps continu

TFtc



Signal à temps *continu*

Spectre *non périodique*

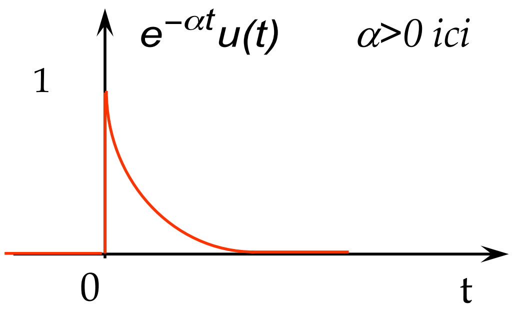
Signal *non périodique*

Spectre *continu*

Exemple : TFtc d'un signal causal à décroissance exponentielle

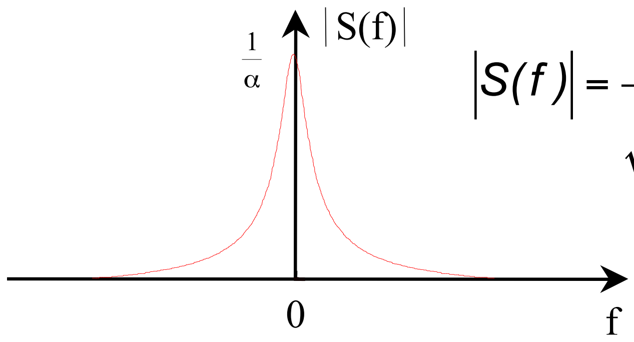
Domaine temporel

$$s(t) = e^{-\alpha t}\, u(t) \qquad \alpha > 0$$

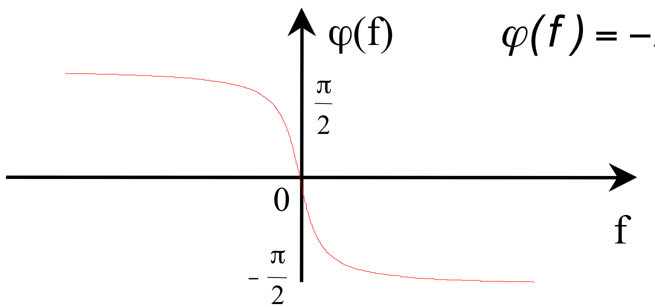


Domaine fréquentiel

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$



$$|S(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}}$$



$$\varphi(f) = -Arc\tan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)$$

Propriétés de la TFtc

- Si la ***transformée de Fourier à temps continu*** est aussi populaire, c'est en grande partie grâce à ses propriétés générales qu'elle le doit
  - ***Linéarité*** $\mathrm{F}\left(ax(t)+by(t)\right)=aX(f)+bY(f)$
  - ***Th. du retard*** $\mathrm{F}\left(x(t-t_0)\right)=e^{-j2\pi t_0 f}X(f) \qquad \forall\, t_o \in R$
  - ***Th. de modulation*** $\mathrm{F}\left(x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right)=X(f-f_0)$
  - ***Facteur d'échelle*** $\mathrm{F}\left(x(at)\right)=\dfrac{1}{|a|}X\left(\dfrac{f}{a}\right)$
  - ***Convolution*** $\mathrm{F}\left(x(t)*y(t)\right)=X(f)\times Y(f)$
  - ***Multiplication*** $\mathrm{F}\left(x(t)\times y(t)\right)=X(f)*Y(f)$

Transformée de Fourier de signaux périodiques

- Signaux périodiques :
  - possèdent un développement en série de Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_o t}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta\left(f - nf_o\right)$$

$$\mathrm{F}\left(e^{j2\pi n f_o t}\right) = \delta(f - nf_o)$$

La TFtc d'un signal périodique est donc une somme d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de f_o pondérées par les coefficients de Fourier c_n du signal

Comment tracer les spectres d'un signal périodique obtenus par TFtc ?

Spectres d'amplitude et de phase de signaux périodiques par TFtc

- ***Par convention***, le module et l'argument de la transformée de Fourier d'un signal périodique sont définis par

$$|S(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \, \delta\left(f - nf_o\right)$$

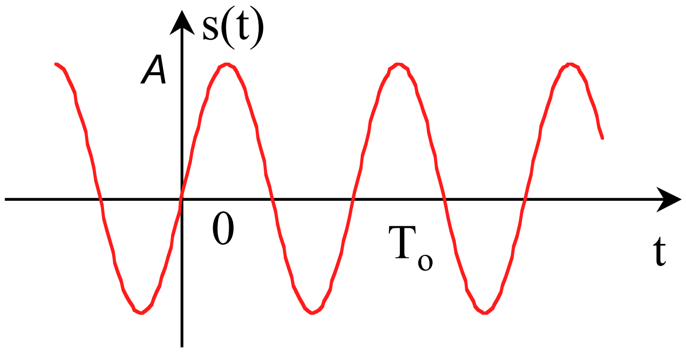
$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Arg(c_n) \, \delta\left(f - nf_o\right)$$

- Spectres d'amplitude et de phase d'un signal périodique obtenus par :
  - TFtc : ***impulsions de Dirac***
  - Décomposition en série de Fourier : ***simples raies***
- On parle néanmoins dans les deux cas de ***spectres de raies*** caractéristiques de signaux périodiques à temps continu

Spectres par TFtc d'un signal sinusoïdal

Domaine temporel

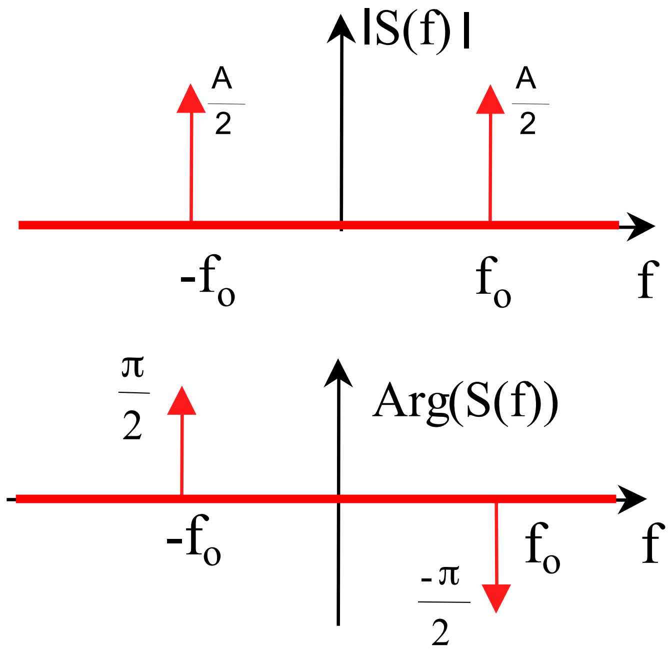
$$s(t) = A\sin(2\pi f_o t)$$



Domaine fréquentiel

$$S(f) = \frac{A}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(f+f_o) + \frac{A}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(f-f_o)$$

$$|S(f)| = \frac{A}{2}\delta(f+f_o) + \frac{A}{2}\delta(f-f_o) \quad Arg\big(S(f)\big) = \frac{\pi}{2}\delta(f+f_o) - \frac{\pi}{2}\delta(f-f_o)$$

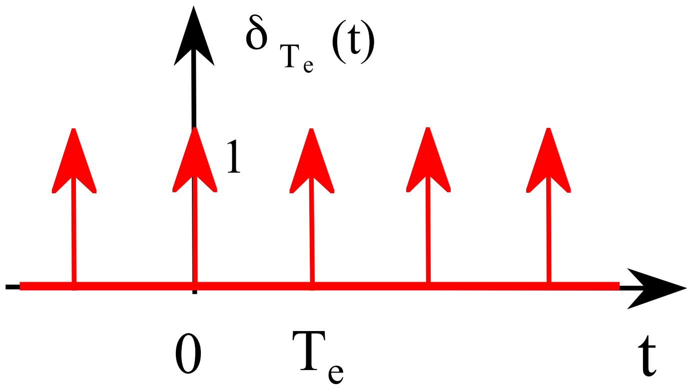


Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

Domaine temporel

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$\delta_{T_e}(t) = \ldots + \delta(t + T_e) + \delta(t) + \delta(t - T_e) + \ldots$$



Domaine fréquentiel

$$F\left(\delta_{T_e}(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e}\,\delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

$$F\left(\delta_{T_e}(t)\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - kf_e\right)$$

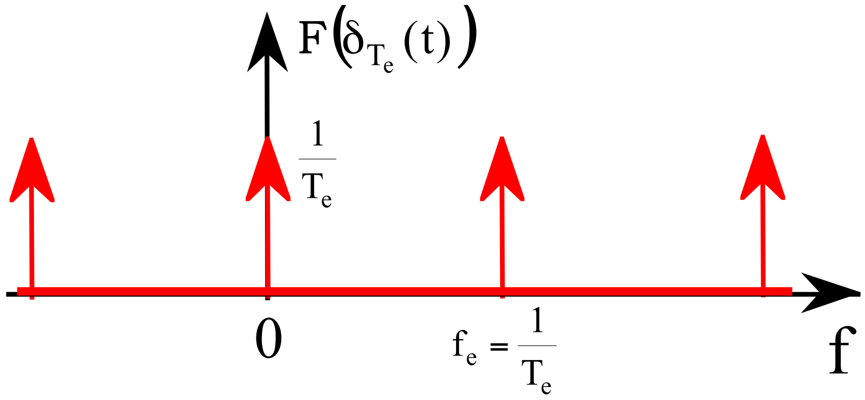


Table de spectres
de signaux à temps continu

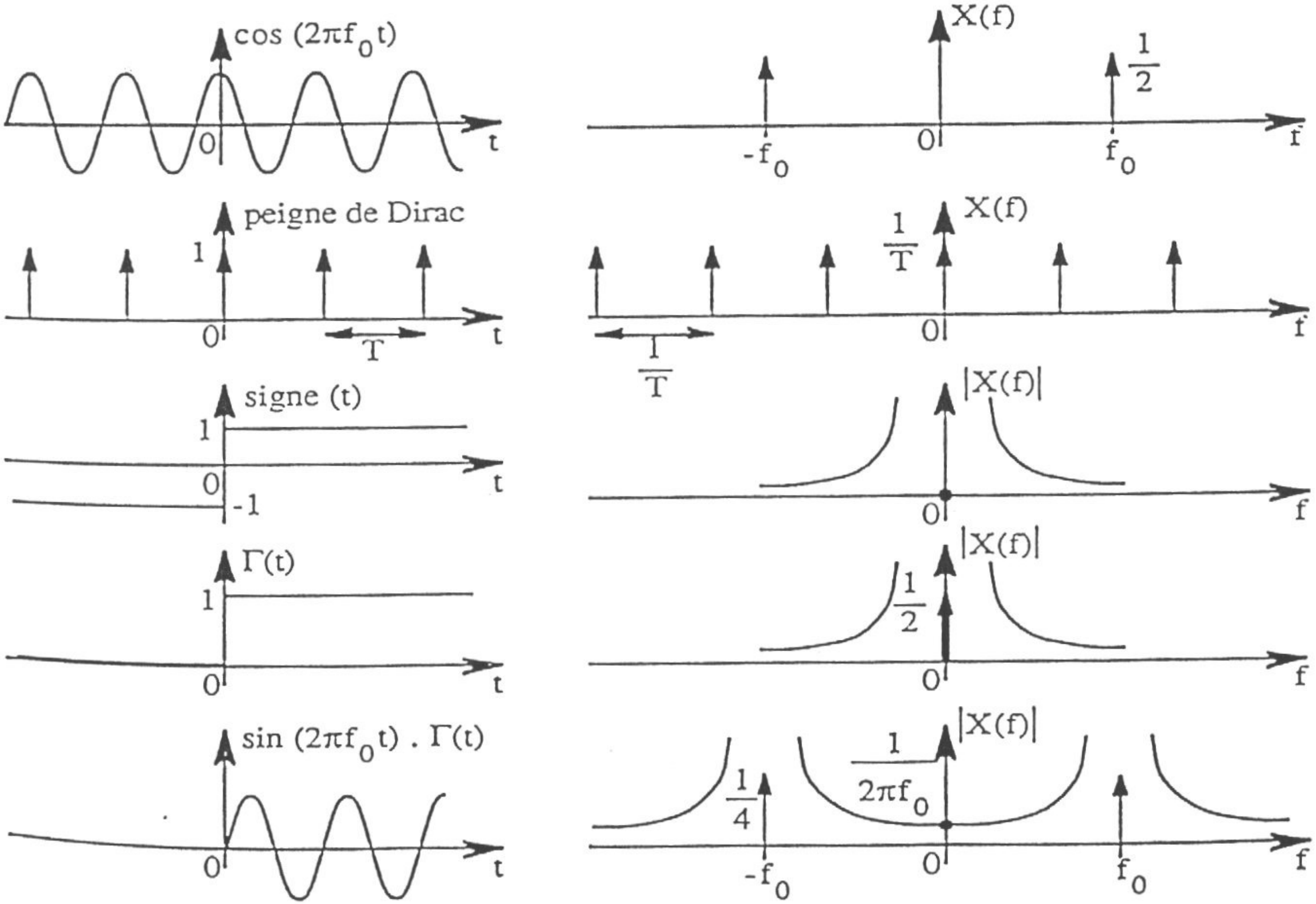
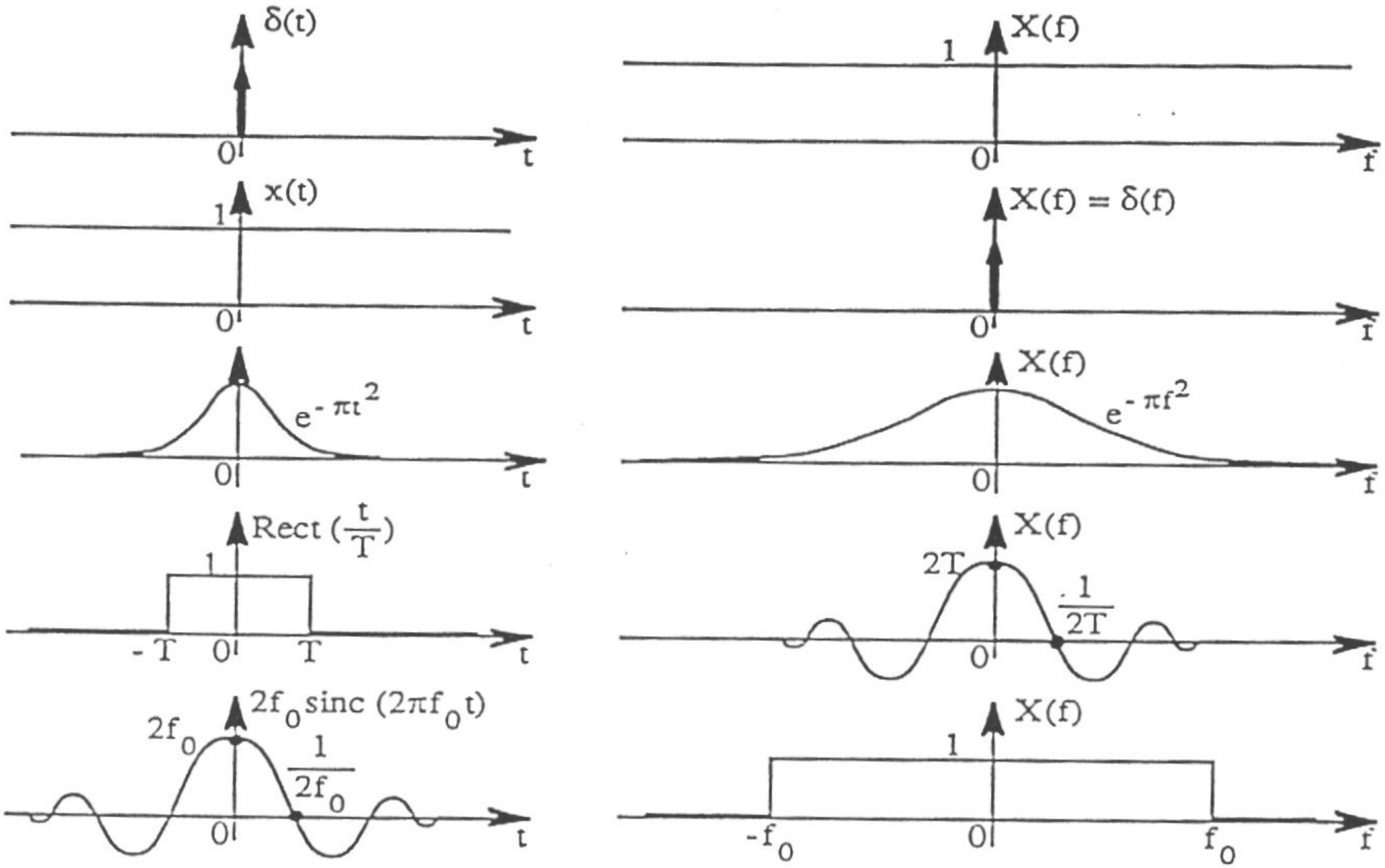
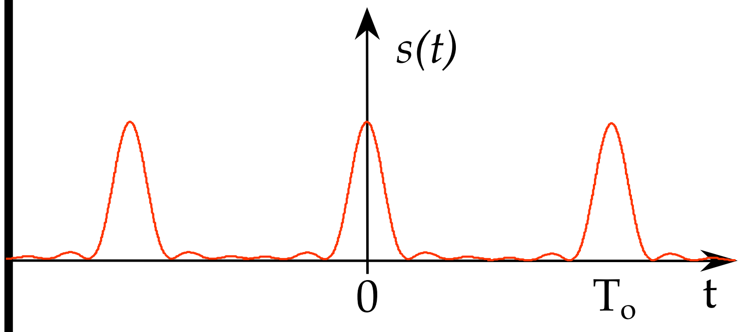


Table de spectres de signaux à temps continu

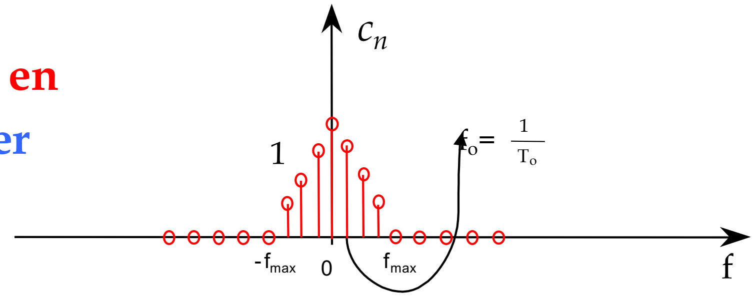


Analyse de Fourier de signaux à temps continu
Bilan

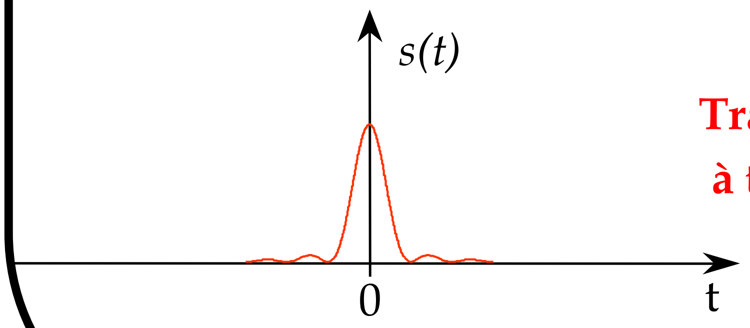
- *s*(*t*) est périodique



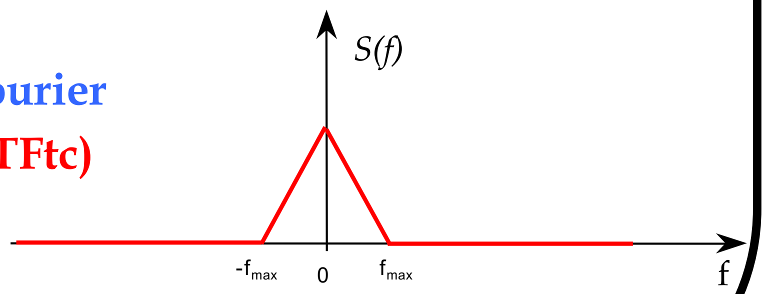
Décomposition en série de Fourier



- *s*(*t*) est non périodique



Transformée de Fourier à temps continu (TFtc)



Pour plus de rappels sur la transformée de Fourier

- Voir les transparents de rappels sur la TFtc sur le site web du cours

- Visionnez les vidéos de Barry Van Veen
    - www.youtube.com/user/allsignalprocessing/playlists

- Visionnez la série de vidéos de Steve Brunton
    - www.youtube.com/watch?v=jNC0jxb0OxE&list=PLMrJAkhIeNNT_Xh3Oy0Y4LTj0Oxo8GqsC&index=1

Objectifs à l'issue des rappels sur les outils d’analyse spectrale de signaux à temps continu

- Connaître la décomposition en série de Fourier
- Connaître la transformée de Fourier à temps continu et ses propriétés
- Savoir tracer et interpréter un spectre d’amplitude et de phase, en particulier dans le cas de signaux simples
- Connaître l’allure des spectres des signaux usuels à temps continu